근궤적 작도법

(0) 페루프 특성방정식을 근궤적을 위한 일반형태로 표시

(1) 근궤적의 수

(2) 근궤적의 출발점과 종착점

(3) 실수축상의 근궤적

(4) 실수축에 대한 대칭성

(5) 점근선의 각도와 위치

(6) 분기점 위치

(7) 허수축과의 교차점

(8) 복소 극점 및 복소 영점에서의 출발각 및 종착각

(0) 폐루프 특성방정식을 근궤적을 위한 일반형태로 표시

$$\boxed{1 + K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = 0}$$

여기서 K : 근궤적 파라미터

- 근궤적을 위한 일반형태로의 변환 예

i) $1 + K\dfrac{1-s}{(s+1)(s+2)} = 0 \Rightarrow 1 + K'\dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)} = 0$ 여기서 $K'(=-K)$ 근궤적 파라미터

ii) $1 + \dfrac{1}{(s+\alpha)(s+2)} = 0 \Rightarrow s^2 + 2s + 1 + \alpha(s+2) = 0$

$\Rightarrow 1 + \alpha\dfrac{s+2}{(s+1)^2} = 0$ 여기서 α : 근궤적 파라미터

(1) 근궤적의 수

- 근궤적의 개수 = 폐루프 극점의 개수

  = 개루프 극점의 개수(***n***개)

(2) 근궤적의 출발점과 종착점

- 폐루프 특성방정식 $1+G(s)=0$ 또는 $D(s)+KN(s)=0$
- 근궤적의 출발점($K=0$) : 개루프 극점 (***n***개)
- 근궤적의 종착점($\boldsymbol{K \to \infty}$) :

$$\begin{cases} \text{개루프 유한 영점 } (\boldsymbol{m}\text{개}) \\ \text{개루프 무한 영점 } (\boldsymbol{n-m}\text{개}) \end{cases}$$

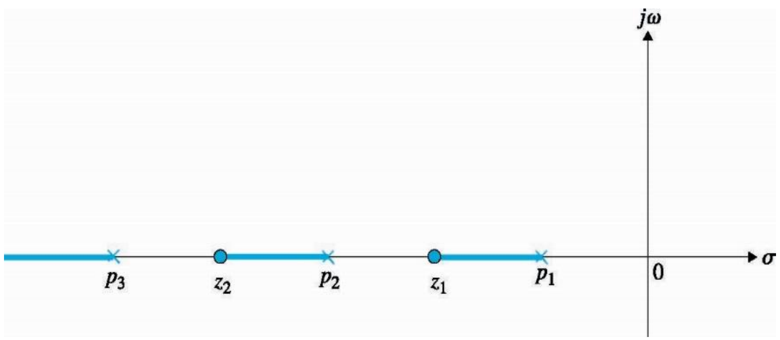
(3) 실수축상의 근궤적

- 근궤적 파라미터 $K > 0$ 일 때 : 실수축상에서 우측에 있는 개루프 극점의 개수와 영점의 개수의 합이 홀수인 영역

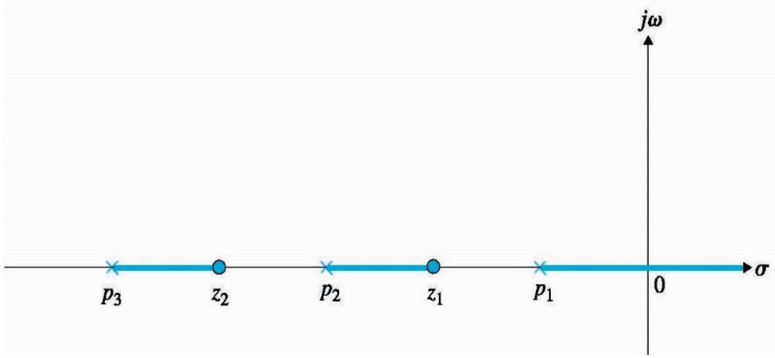
- 근궤적 파라미터 $K < 0$ 일 때 : 실수축상에서 우측에 있는 개루프 극점의 개수와 영점의 개수의 합이 짝수인 영역

- 실수축상의 근궤적 예 :

$$G(s) = \frac{K(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} \quad (p_3 < z_2 < p_2 < z_1 < p_1 \text{ 인 음의 실수})$$



(a) $K > 0$일 때



(b) $K < 0$일 때

그림 $G(s) = \dfrac{K(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$ 의 실수축상의 근궤적

(4) 실수축에 대한 대칭성

- 복소 극점 ($p=\sigma \pm j\omega$)은 항상 허수부가 공액값으로 존재
  - ⇨ 허수부의 값이 실수축에 대해 대칭
  - ⇨ 근궤적도 역시 실수축에 대해 대칭

(5) 점근선의 각도와 위치

- 무한 영점($s \to \infty$)으로 거동하는 근궤적은 점근선 위에 존재
- 점근선의 중심점은 항상 실수축상에 있음
- 점근선의 개수 = 개루프 무한 영점의 개수 (***n-m***)

• 점근선의 각도 : $\alpha = \dfrac{\pm(2k+1)\,180^\circ}{n-m},\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ (K > 0일 때)

• 점근선의 중심점 : $A_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$

예제 1. 개루프 전달함수 $G(s)$ 에 대한 점근선의 각도와 중심점

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

- 개루프 무한 영점의 개수 : $n - m = 2 - 0 = 2$

- 점근선의 각도 : $\alpha = \frac{\pm 1 \times 180°}{2} = \pm 90°$

- 점근선의 중심점 : $A_c = \frac{-2-0}{2} = -1$

(6) 분기점 위치

- 이탈점 : 근궤적이 실수축을 떠나는 점
- 복귀점 : 근궤적이 실수축으로 복귀하는 점
- 폐루프 특성방정식을 $K = f(s)$ 로 변환
- $dK/ds = 0$ 의 근 ⇨ 분기점

예제 2. 개루프 시스템 **G(s)** 에 대한 분기점을 구하고 근궤적 작도

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

- 폐루프 특성방정식을 $K = f(s)$로 변환 : $K = -s(s+2)$
- $dK/ds = 0$ ⇨ 분기점 : $s = -1$

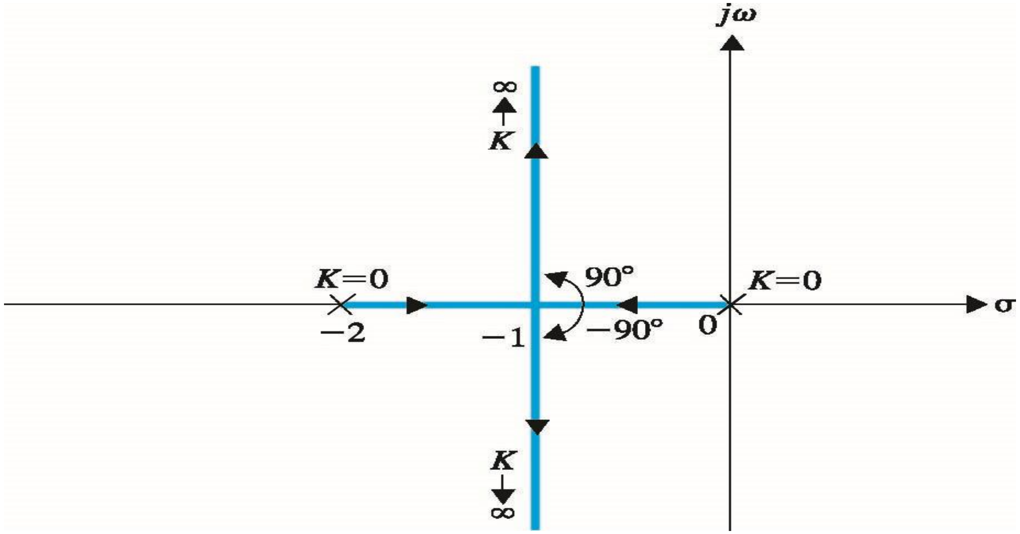


그림 시스템 $G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$ 의 근궤적선도

(7) 허수축과의 교차점

- 교차점에서의 주파수 ω와 임계 근궤적 파라미터 K_c를 구하는 방법

i) 페루프 특성방정식에서 **s**값에 $j\omega$를 대입하여 실수부와 허수부를 각각 0으로 함

ii) Routh 안정도 판별법을 이용하여 안정한계에 있을 때의 Routh 배열의 첫 번째 열의 계수를 조사

예제 3. 시스템 $\boldsymbol{G(s)}$ 의 근궤적에서 허수축과의 교차점과 그때의 시스템 파라미터 K_c 값

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+5)}$$

- 폐루프 특성방정식

$$s(s+3)(s+5)+K=0 \quad \text{또는} \quad s^3+8s^2+15s+K=0$$

i) 폐루프 특성방정식에서 $s \to j\omega$ 대입

$$(j\omega)^3+8(j\omega)^2+15(j\omega)+K=(K-8\omega^2)+j\omega(15-\omega^2)=0$$

ii) Routh 안정도 판별법

$K_C=120$일 때, 보조 방정식 $8s^2+K=0$ ⇨ $\omega=\sqrt{15}$

Routh 배열

s^3	1	15
s^2	8	K
s^1	$\frac{120-K}{8}$	
s^0	K	

- 이 경우는 점근선의 중심점과 분기점이 일치하지만 일반적으로는 일치하지 않는다.

(8) 복소 극점 및 복소 영점에서의 출발각 및 종착각

- 근궤적 작도 예 : $G(s) = \dfrac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$

- 개루프 전달함수의 위상조건식

$$\theta_z - \theta_p - \theta = \pm(2k+1)180^\circ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 180^\circ - \theta_p + \theta_z = 180^\circ - 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$

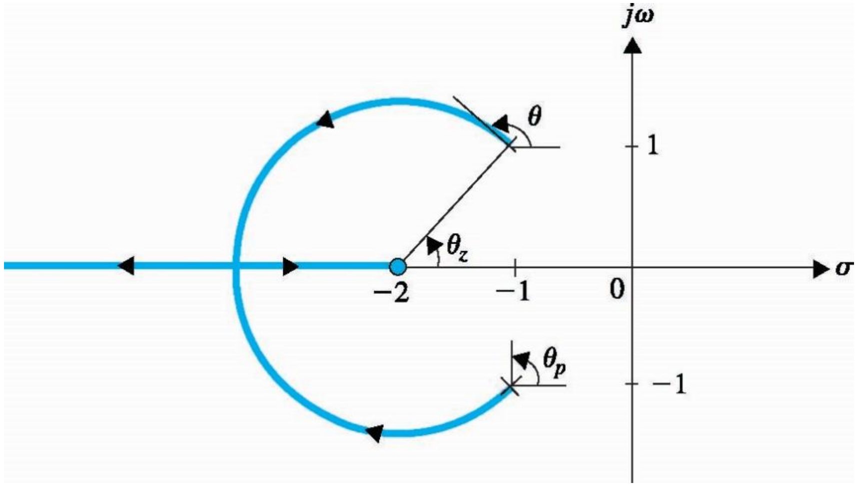


그림 $\quad G(s) = \dfrac{K(s+2)}{s^2+2s+2}$ 의 극점 –영점 배치 및 근궤적

◆ 소스-싱크 상사(source-sink analogy)

- 개루프 극점 : 소스(밀어내는 효과)

- 개루프 영점 : 싱크(끌어당기는 효과)

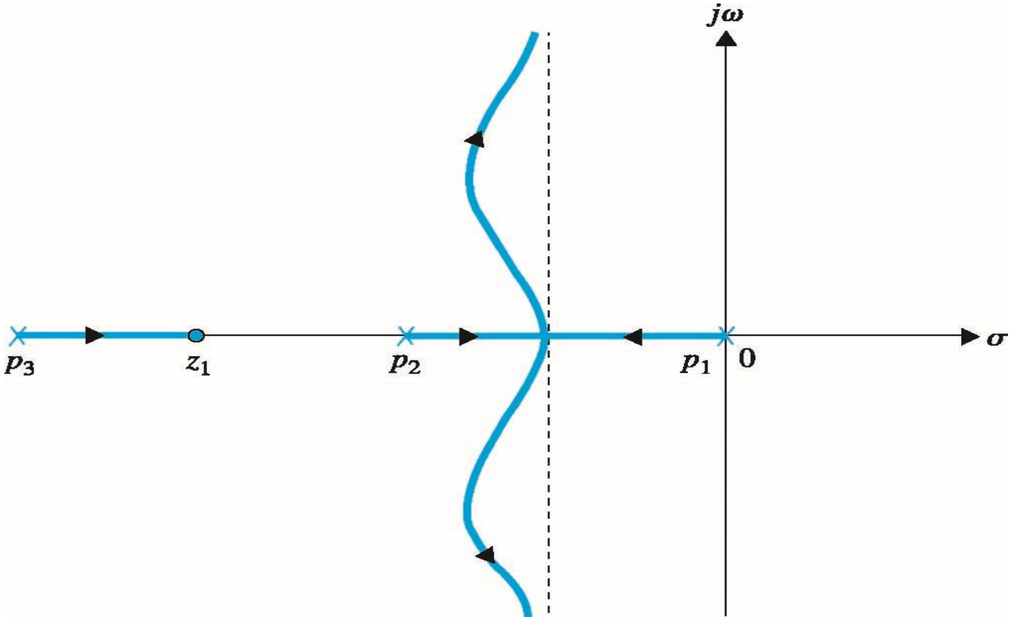


그림 소스-싱크 상사 개념을 이용하여 작도한 근궤적선도의 예

예제 4. $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s^2(s+2)}$ 인 시스템의 근궤적 작도

- 근궤적을 위한 일반형태

$$1+K\frac{s+1}{s^2(s+2)}=0$$

- s-평면상에 개루프 극점, 영점 배치 및 실수축상의 근궤적

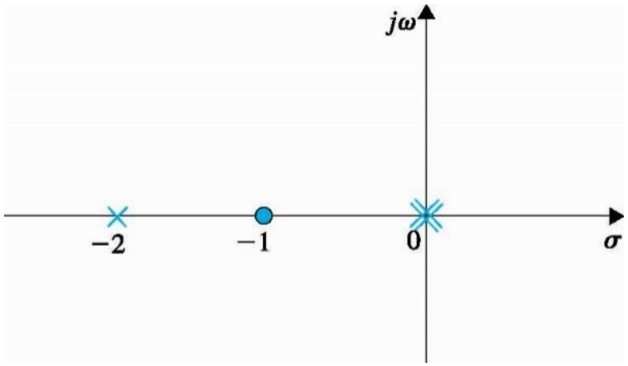


그림 $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s^2(s+2)}$ 의 극점-영점 배치

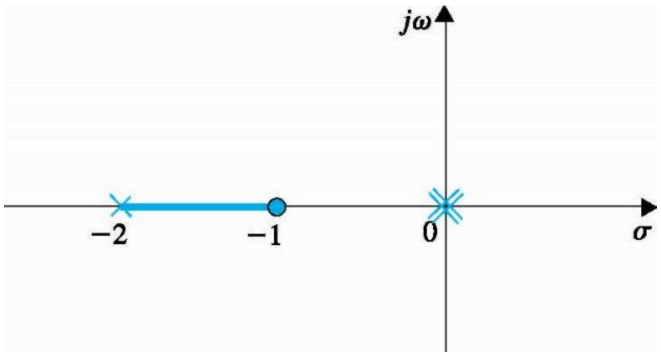


그림 $G(s)=\dfrac{K(s+1)}{s^2(s+2)}$의 실수축상의 근궤적

- 점근선의 각도 α 및 중심점 A_c

- 점근선의 각도 : $\alpha = \dfrac{\pm(2k+1)180°}{n-m} = \pm\ 90°$

- 점근선의 중심점 : $A_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} = \dfrac{-2-(-1)}{3-1} = -0.5$

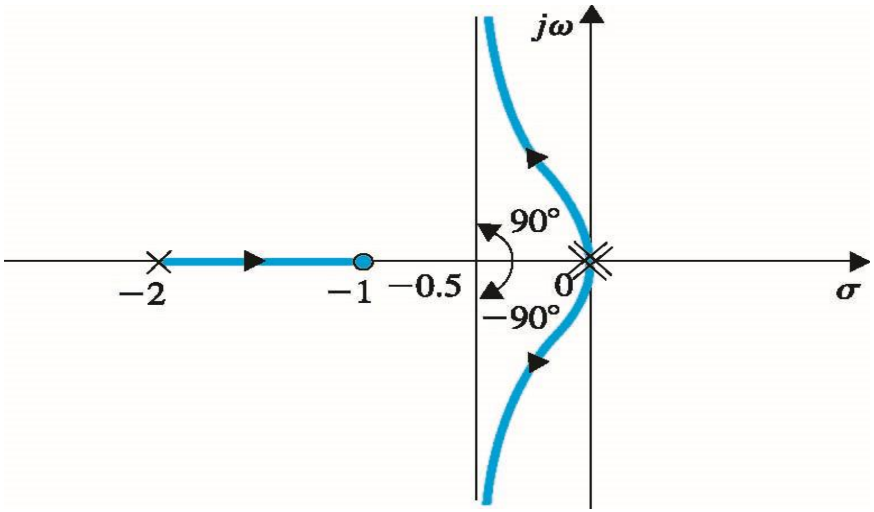


그림 $G(s) = \dfrac{K(s+1)}{s^2(s+2)}$ 의 근궤적선도

예제 5. $G(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(s+2)}$ 인 시스템의 근궤적 작도

- 근궤적을 위한 일반형태 : $1+K\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}=0$

- ***s***-평면상에 개루프 극점, 영점 배치 및 실수축상의 근궤적

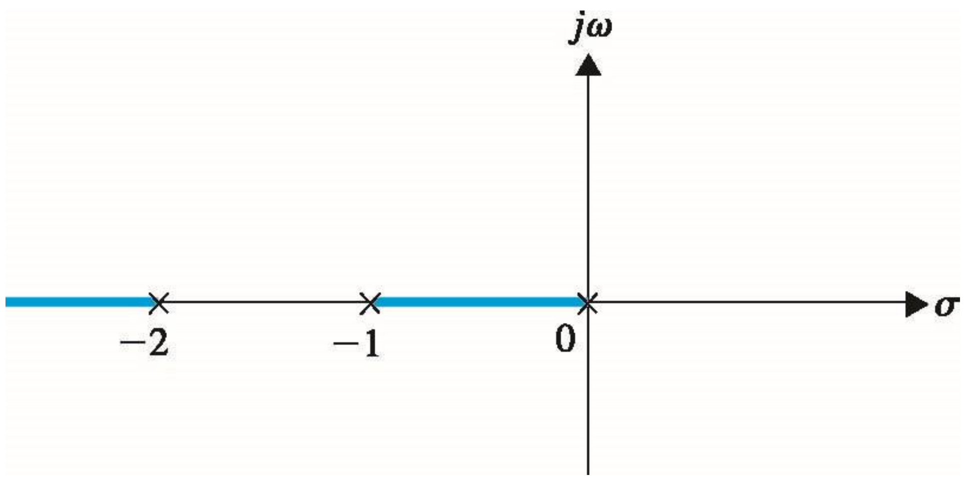


그림 5.11 $G(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(s+2)}$ 의 실수축상의 근궤적

,

- 점근선의 각도 및 중심점

- 점근선의 각도 : $\alpha = \dfrac{\pm(2k+1)180^\circ}{n-m} = \pm 60^\circ,\ 180^\circ$
- 점근선의 중심점 : $A_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m} = \dfrac{-3}{3} = -1$

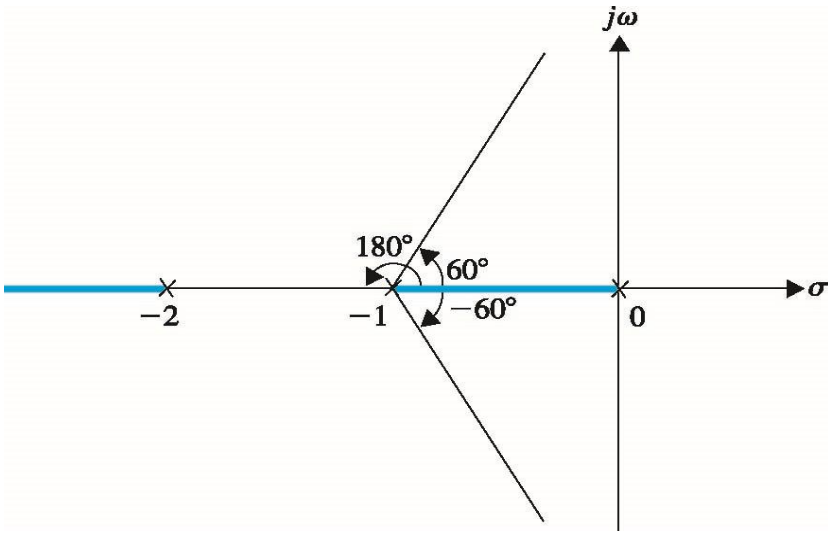


그림 $G(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(s+2)}$ 의 근궤적선도상에서의 점근선 표시

- **분기점의 위치**

• 페루프 특성방정식 ⇨ $K = -s(s+1)(s+2)$

• $dK/ds = 0$ ⇨ 분기점 $s = -0.423$

- **허수축과의 교차점**

$$1 + K\frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = 0$$

$$(K - 3\omega^2) + j(2\omega - \omega^3) = 0$$

⇨ $\omega = \sqrt{2}$, $K = 6$

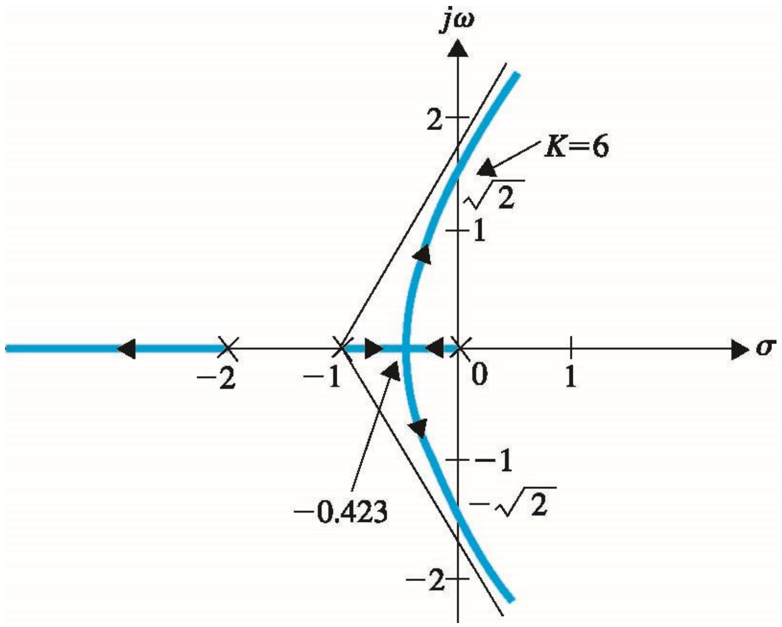


그림 $G(s) = \dfrac{K}{s(s+1)(s+2)}$ 의 근궤적선도

5.5 근궤적을 이용한 제어시스템 해석

예제 5.12 게인 K 값에 따른 폐루프 제어시스템의 성능 평가

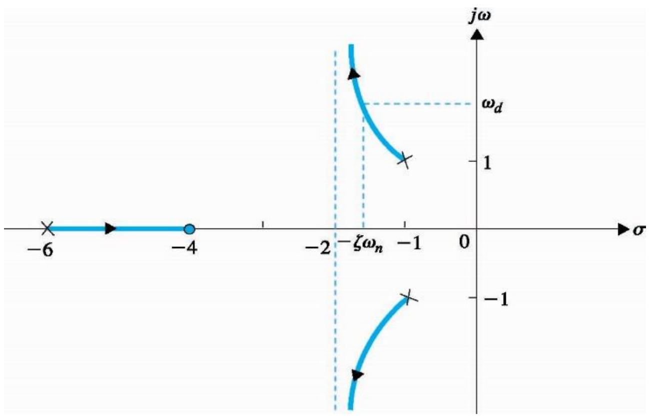


그림 5.24 근궤적선도

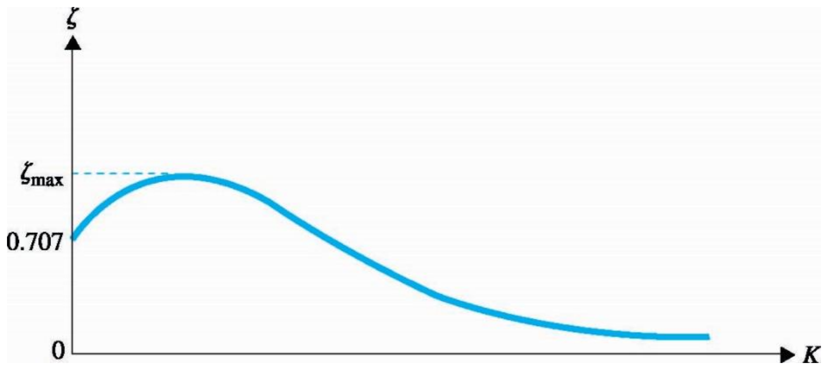


그림 5.25 게인 K값에 따른 감쇠비 ζ

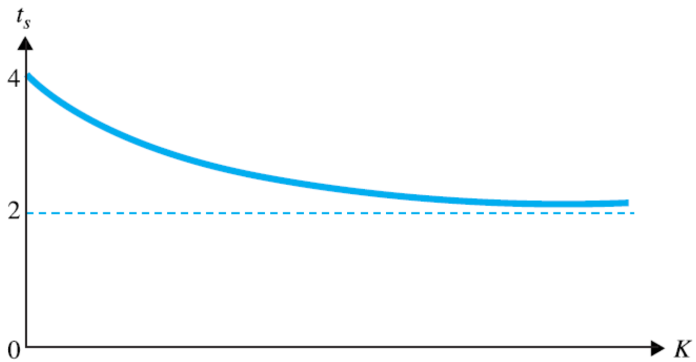


그림 5.26 게인 K값에 따른 정착시간 t_s

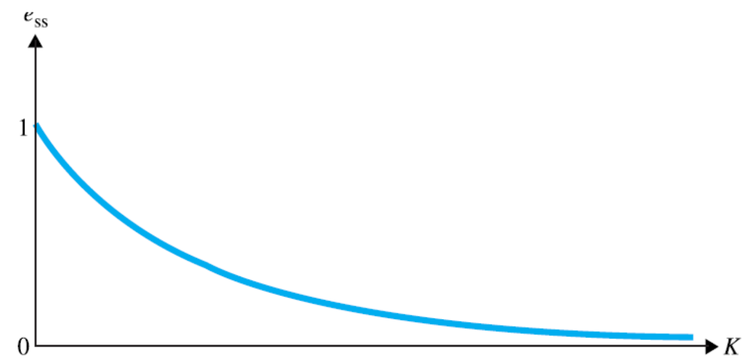


그림 5.27 게인 K값에 따른 정상상태오차

예제 5.13 $G(s)=\dfrac{\alpha K}{(s+\alpha)(s+1)^2}$ 시스템의 근궤적 작도 및 폐루프 제어시스템의 성능 및 안정도 평가

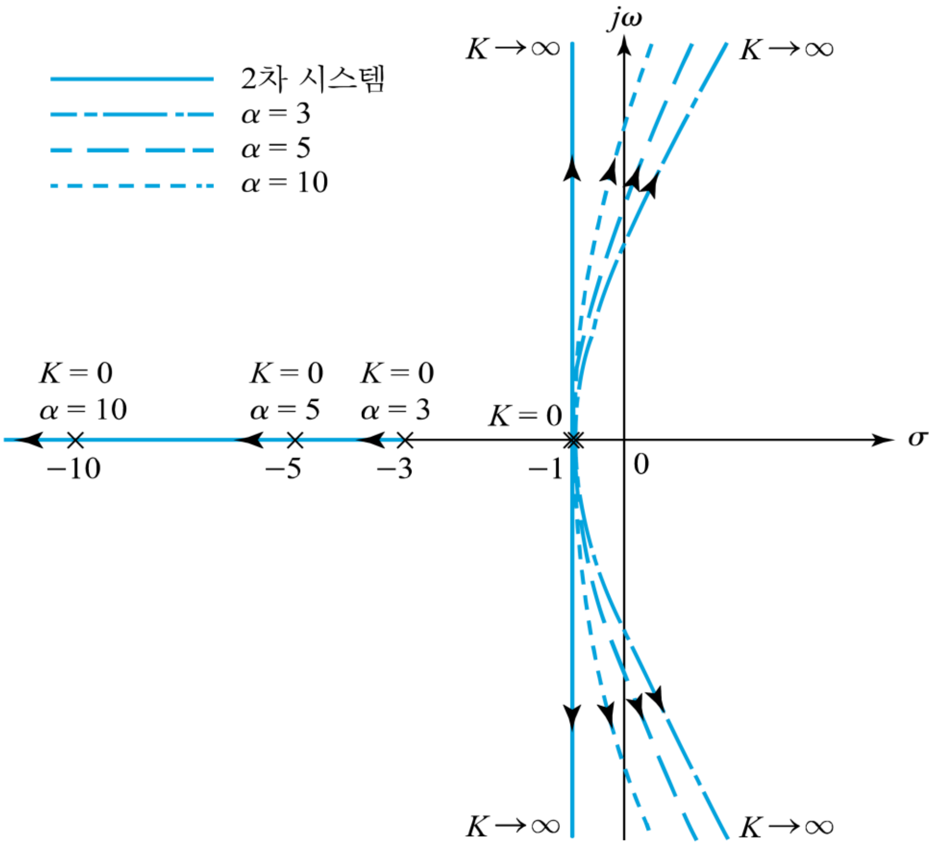


그림 5.28 $G(s)=\dfrac{\alpha K}{(s+\alpha)(s+1)^2}$ 인 시스템과 **G(s)** 에서 $s=-\alpha$ 있는 개루프 극점이 무시된 2차 시스템에 대한 근궤적선도

- 개루프 시스템에서 대표극점 개념을 적용하면 $\alpha \geq 3\omega_n$ 일 때 이 극점($s = -\alpha$)은 무시될 수 있다(3차 시스템 $\Longrightarrow$ 2차 시스템).

- 개루프 시스템을 피드백하여 폐루프 제어시스템을 설계할 때 $s = -\alpha$ 에 있는 개루프 극점을 무시할 수 있는지 평가(K = 1일 때)

표 5.1 2차 시스템과 α값에 따른 3차 시스템의 안정도 및 과도응답 성능(K = 1일 때)

시스템 성능	2차 시스템 $(\omega_n = 1)$	3차 시스템 $(\alpha = 3)$	3차 시스템 $(\alpha = 5)$	3차 시스템 $(\alpha = 10)$
안정임계 αK_c	∞	32	72	122
시정수 $T(\mathrm{sec})$	1	1.32	1.16	1.05
감쇠비 ζ	0.707	0.577	0.627	0.667

5.6 MATLAB을 이용한 근궤적

예제 5.14 MATLAB을 이용한 근궤적 작도

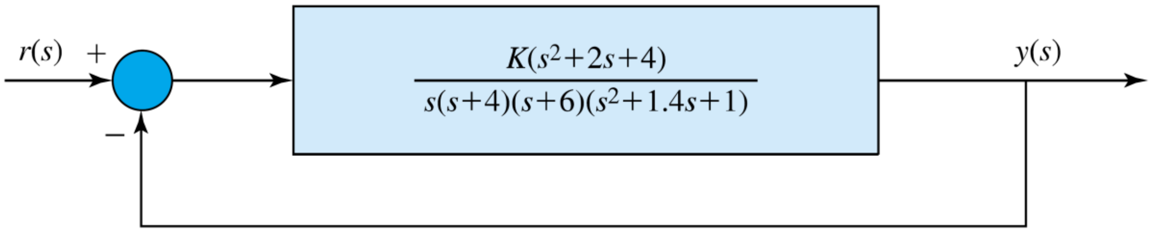


그림 5.29 폐루프 제어시스템

MATLAB 프로그램 5.1 — 소스 코드

```
% 예제 5.14

num = [1 2 4];
den1 = poly([0 -4 -6]);
den2 = [1 1.4 1];
G = tf(num, conv(den1, den2));
rlocus(G)
axis([-8 8 -8 8]); grid on;
title('Root-locus plot of G(s)
     = K(s^2 + 2s + 4)/[s(s + 4)(s + 6)(s^2 + 1.4s + 1)]')
```